

חוברת קיץ לקראת י"א

תלמידי 4 יח"ל

הקדמה:

תלמידים יקרים!

לפניכם עבודת קיץ במתמטיקה המיועדת לתלמידי כיתה י' העולים לכיתה י"א ברמת 4 יחידות.

העבודה מורכבת משאלות נבחרות מתוך האתר bagrut.gool.co.il בשלושה מהפרקים שנלמדו בכיתה י': גיאומטריה משולבת, אנליזה וסטטיסטיקה.

לתרגילים בעבודה קיים פתרון מלא בסרטון אשר תוכלו לצפות בו על מנת להעשיר את הבנתכם. יש לפתור את התרגילים בעצמכם, ורק אם נתקעתם לגשת לסרטון. על מנת לגשת לסרטון תוכלו לסרוק את קוד ה-QR בצידו, או ללחוץ על הקוד במידה ובידיכם עותק דיגיטלי של העבודה.

בתחילת שנת הלימודים הבאה תיערך בחינה על עבודת הקיץ.

חופשה נעימה 😊

1..... חוברת קיץ לקראת י"א

3.....גאומטריה משולבת:

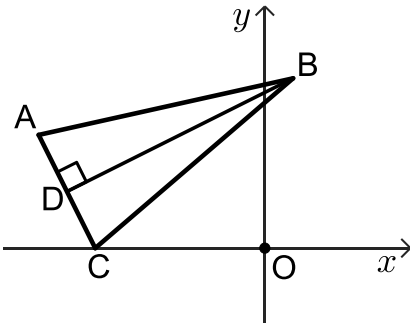
10.....אנליזה:

10.....חקירה:

14.....בעיות קיצון:

18.....סטטיסטיקה:

גאומטריה משולבת:

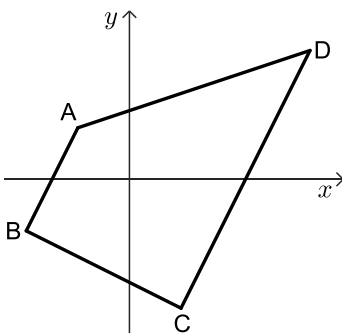


- 1) במשולש שווה שוקיים ABC ($AB=BC$). נתון $A(-8,4)$, $B(1,6)$ הקודקוד C נמצא על ציר ה- x .
- מצאו את אורך שוק המשולש.
 - מצאו את שיעורי הנקודה C אם ידוע ש- $x_C < x_B$.
- BD הוא גובה לצלע AC .
- הסבירו ללא חישוב מדוע $AD=CD$.
 - חשבו את אורך BD .
 - חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$.
 - חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle BCO$, (O ראשית הצירים).

- 2) נתונה מקבילית $ABCD$ ששיעורי שלושה מקודקודיה הם: $A(6,4)$, $B(-5,-2)$, $C(-11,9)$



- חשבו את שיעורי הקודקוד הרביעי (קודקוד D).
 - האם המקבילית היא מעוין?
 - האם המקבילית היא מלבן?
 - האם המקבילית היא ריבוע?
- חשבו את אורכי צלעות המקבילית ואת אורכי אלכסוניה.
 - חשבו את היקף המקבילית.
 - חשבו את שטח המקבילית בשתי דרכים:
 - בעזרת שימוש באורכי הצלעות בלבד.
 - בעזרת שימוש באלכסונים בלבד.

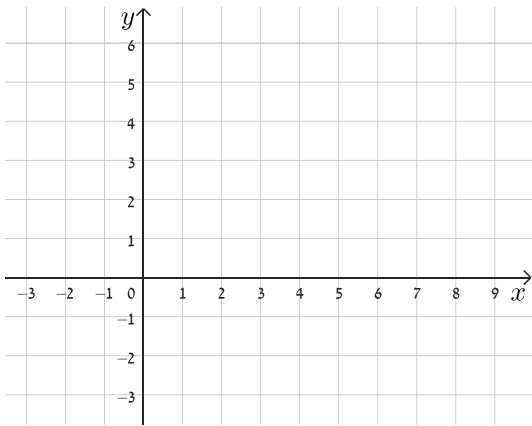


- 3) במערכת הצירים שלפניכם נתון מרובע $ABCD$ ששיעורי קודקודיו הם: $A(-2,2)$, $B(-4,-2)$, $C(2,-5)$, $D(7,5)$

- מה הוא סוג המרובע?
 - במרובע זה מעבירים קטע אמצעים EF (E היא אמצע הצלע AD ו- F היא אמצע הצלע BC).
- מצאו את שיעורי הנקודה F .
 - מצאו את משוואת הישר EF .
 - האלכסון AC חותך את EF בנקודה K .
 - מצאו את שיעורי הנקודה K .
 - קבעו האם: $AK = CK$. נמקו.

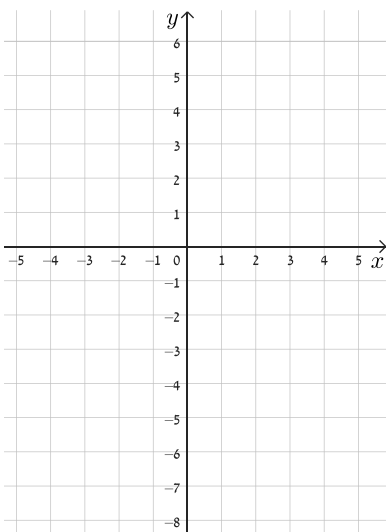
- ה. הנקודה R היא נקודת החיתוך של CD עם ציר ה- x .
- (1) מצאו את שיעורי הנקודה R.
 - (2) הישר AR חותך את EF בנקודה M. מצאו את שיעורי הנקודה M.
 - (3) קבעו האם: $AM = RM$. נמקו.
- ו. הנקודה P היא נקודה כלשהי הנמצאת על הצלע CD. הישר AP חותך את EF בנקודה N. הוכיחו כי: $AN = PN$ (ללא שימוש בשיעורי הנקודות במערכת הצירים).

(4) קודקודי המרובע ABCD הם: $A(8,2)$, $B(2,6)$, $C(0,1)$, $D(6,-3)$.

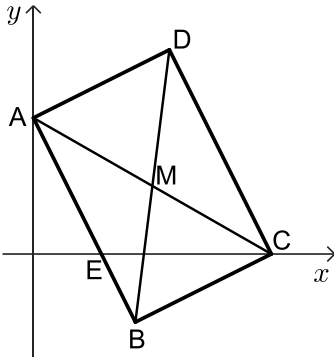


- א. סרטטו את המרובע ABCD במערכת הצירים שלפניכם:
 - ב. מה הוא סוג המרובע ABCD? הסבירו.
 - ג. מעבירים את האלכסון AC. מה הוא אורכו?
 - ד. מסמנים בנקודה E את אמצע הצלע CD ובנקודה H את אמצע האלכסון AC. הוכיחו כי $\triangle CEH \sim \triangle ABC$.
 - ה. נתון: $\angle ACD = 40.81^\circ$.
- (1) חשבו את אורכי צלעות המרובע ABCD.
 - (2) חשבו את שטח המשולש ACD.
 - (3) חשבו את שטח המרובע ABCD.
- ו. חשבו את היחס שבין שטח המשולש CEH לשטח המרובע ABCD.

(5) נתון מלבן ABCD ששיעורי קודקודיו הם: $A(-4,4)$, $B(0,5)$, $C(3,-7)$, $D(-1,-8)$.



- א. סרטטו את המלבן ABCD במערכת צירים.
 - ב. חשבו את היקף המלבן ואת שטחו.
 - ג. חשבו את אורכי האלכסונים של המלבן.
 - ד. מצאו את משוואות האלכסונים.
 - ה. מצאו את שיעורי נקודת מפגש האלכסונים במלבן.
- ו. מצאו את הזוויות הנוצרות בין אלכסוני המלבן לצלעות המלבן.
- ז. מצאו את הזווית החדה שבין אלכסוני המלבן.



6) המרובע ABCD הוא מקבילית. אורך הצלע $BC = AD = \sqrt{20}$. נתון: $B(3, -2)$, $D(4, 6)$. O ראשית הצירים.



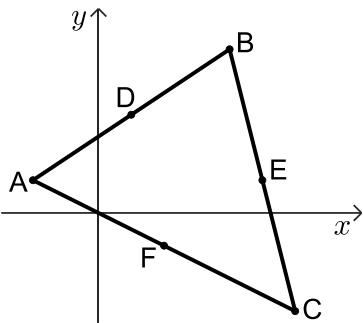
- מצאו שיעורי הנקודה A, אם נתון: $y_A < 6$.
- הוכיחו כי המרובע ABCD הוא מלבן.
- אלכסוני המלבן נפגשים בנקודה M. מצאו את שיעורי הקודקוד C.
- הצלע AB חותכת את ציר ה-x בנקודה E. מצאו את שיעורי הקודקוד E.

- הוכיחו כי המשולשים CBE ו-AOE דומים, ומצאו את יחס הדימיון.
- מצאו פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש AOE.
- חשבו את שטח המרובע ACBO.
- חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$.

7) במשולש ABC הנקודות D, E, F הן אמצעי הצלעות AB, BC, AC בהתאמה.



א. הוכיחו כי המרובע ADEF הוא מקבילית. נתון: $A(-2, 1)$, $F(2, -1)$, $E(5, 1)$, $D(1, 3)$.



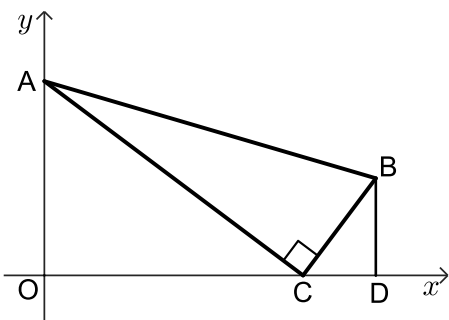
- מצאו את שיעורי הנקודה B.
- חשבו את שיעורי הנקודה C.
- הסבירו מדוע $\triangle DEF \sim \triangle CAB$.

- מהו היחס בין היקף המשולש DEF לבין היקף המשולש CAB?
- מהו היחס בין שטח המשולש DEF לבין שטח המשולש CAB?
- הוכיחו: $S_{\triangle ABF} = 2 \cdot S_{\triangle DEF}$.

8) במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) הקודקוד C מונח על ציר ה-x.



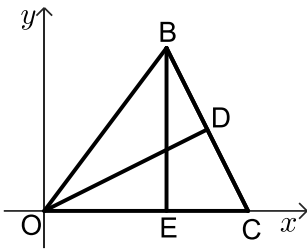
מהקודקוד B הורידו אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה D. הנקודה O היא ראשית הצירים.



- הוכיחו: $\triangle AOC \sim \triangle CDB$.
- משוואת הצלע AC היא: $4y + 3x = 48$, מצאו את אורך הצלע AO.

ג. נתון כי יחסי השטחים $\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle CDB}} = \frac{64}{9}$.

- מצאו את אורך הצלע CD.
- מצאו את אורכי הצלעות CO ו-BD.
- חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle CBA$.
- האם המשולשים AOC ו-ACB דומים זה לזה? נמקו.



9 במשולש OBC העבירו גבהים OD ו-BE לצלעות BC ו-OC בהתאמה.

הנקודה O היא ראשית הצירים. הנקודה C נמצאת על ציר ה-x.

משוואת הישר BC היא: $y = -2x + 20$.

א. מצאו את אורך הצלע OC.

ב. (1) מצאו את משוואת הישר OD.

(2) חשבו את גודל הזוויות החדות של המשולש ODC.

ג. הוכיחו כי המשולשים BEC ו-ODC דומים.

ד. נתון: $\frac{S_{BEC}}{S_{ODC}} = 0.8$.

(1) חשבו את אורך הצלע BC.

(2) חשבו את שטח המשולש OBC.



10 קודקודי המשולש ABC הם $A(2, -1)$, $B(6, 2)$, $C(10, 0)$.

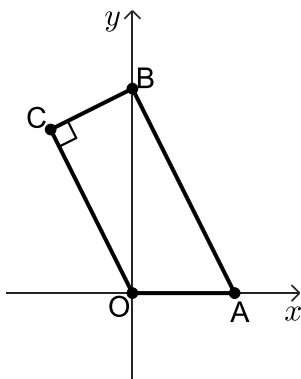
א. מצאו את משוואת התיכון לצלע AB.

ב. מצאו את משוואת AF, התיכון לצלע BC.

ג. מצאו את שיעורי נקודת המפגש של התיכונים במשולש ABC.

ד. נסמן את נקודת מפגש התיכונים ב-O.

חשבו את היחס: $\frac{AO}{OF}$ והסבירו את משמעות הגאומטרית של התוצאה.



11 המרובע ABCO הוא טרפז ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$, $AB \parallel OC$).

משוואת הצלע AB היא: $y = -2x + 5$.

הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x ועל ציר ה-y בהתאמה.

O ראשית הצירים (כמתואר באיור).

א. (1) מצאו את משוואת הצלע BC.

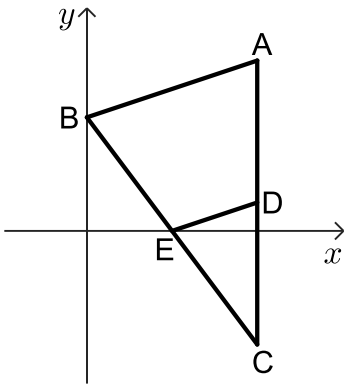
(2) חשבו את שיעורי הקודקוד C.

ב. חשבו את גודל הזווית BOC.

ג. (1) הוכיחו כי המשולשים ABO ו-BOC דומים.

(2) חשבו את יחס השטחים של המשולשים ABO ו-BOC.





12 בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC. הקודקוד B נמצא על ציר ה- y , והצלע AC מקבילה לציר ה- y .

נתון: $A(6,6)$, $AB = \sqrt{40}$.

שיעור ה- y של הקודקוד B קטן מ-6.

א. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

הנקודה E היא אמצע הצלע BC.

נתון: הנקודה E נמצאת על ציר ה- x .

ב. מצאו את שיעורי הנקודות C ו-E.

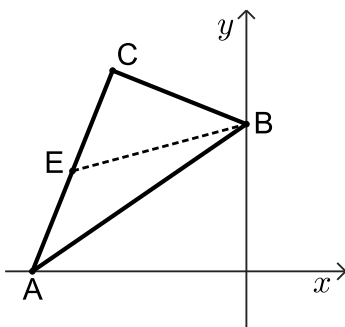
הנקודה D היא אמצע הצלע AC.

מן הנקודה E העבירו ישר המקביל לציר ה- y וחותר את הצלע AB בנקודה F.

ג. (1) הוכיחו כי המרובע FADE הוא מקבילית.

(2) חשבו את שטח המקבילית FADE.

ד. מצאו את גודל הזווית $\angle DEF$.



13 בסרטוט שלפניכם משולש ישר זווית ABC ($\angle ACB = 90^\circ$).

הקודקוד B נמצא על ציר ה- y .

נתון כי שיעורי הקודקוד A הם $(-16,0)$,

ומשוואת הצלע CB היא: $y = -\frac{2}{5}x + 11$.

א. מצאו את משוואת הצלע AC.

ב. מצאו את שיעורי הקודקוד C.

BE הוא תיכון לצלע AC.

ג. (1) מצאו את אורך הקטע EC.

(2) מצאו את גודל הזווית CEB.

הנקודה K נמצאת על הקטע EB. נתון: שטח המשולש AEK הוא 30.

ד. מצאו את אורך הקטע EK.

תשובות סופיות:

(1) א. $\sqrt{85}$ ב. $C(-6,0)$ ג. במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא גם תיכון. ד. $BD = 4\sqrt{5}$
ה. $\angle ACB = 75.963^\circ$ ו. $\angle BCO = 40.6^\circ$.

(2) א. $D(0,15)$ ב. כן, הוכחה. ג. כן, הוכחה. ד. כן, הוכחה.

(3) א. המרובע ABCD הוא טרפז, מכיוון שיש לו זוג צלעות נגדיות מקבילות ולא שוות: $(AB \parallel CD, AB \neq CD)$.

ב. (1) $F(-1, -3.5)$ ב. (2) $y = 2x - 1.5$ ג. $K(0, -1.5)$, הוכחה.

ד. (1) $R(4.5, 0)$ ד. (2) $M(1.25, 1)$ ד. (3) $AM = RM$, הוכחה. ה. הוכחה.

(4) א. ראו סרטוט בסרטון וידאו.

ב. היות ו- $AB \parallel CD$ וכן $AC \parallel DB$ המרובע הוא מקבילית.

$$ג. AC = d_{AC} = \sqrt{(8-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \sim 8.06$$

ד. הוכחה. ה. (1) 40.83° ה. (2) $AD = BC = \sqrt{29}$, $AB = CD = \sqrt{52}$.

$$ה. (3) 19 \text{ יחידות שטח} = S_{\Delta ACD} \quad ה. (4) 38 \text{ יחידות שטח} = S_{ABCD} \quad ו. \frac{S_{\Delta CEH}}{S_{ABCD}} = \frac{4.75}{38} = \frac{1}{8}$$

(5) א. ראו סרטוט בסרטון וידאו.

ב. 32.98 יחידות אורך $= P_{ABCD}$, 51 יחידות שטח $= S_{ABCD}$.

ג. 13.038 יחידות אורך $= AC$.

$$ד. AC: $y = -\frac{11}{7}x - 2\frac{2}{7}$, BD: $y = 13x + 5$$$

$$ה. E\left(-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}\right) \quad ו. \alpha = 18.43^\circ \quad ז. \angle DEC = 36.87^\circ$$

(6) א. $A(0,4)$ ב. הוכחה. ג. $C(7,0)$ ד. $E(2,0)$

ה. (1) הוכחה, יחס הדימיון $\frac{2}{\sqrt{5}}$. (2) פי 1.25. ו. 21 יח"ר. ז. 56.31° .

(7) א. הוכחה. ב. $B(4,5)$ ג. $C(6,-3)$ ד. הוכחה.

ה. 1:2. ו. 1:4. ז. הוכחה.

(8) א. הוכחה. ב. 12 יח"א $= AO$ ג. (1) 4.5 יח"א $= CD$ ג. (2) $BD = 6, CO = 16$

ד. (1) 69.44° ד. (2) לא.

(9) א. $OC = 10$ ב. (1) $y = \frac{1}{2}x$ ב. (2) $\angle C = 63.43^\circ, \angle COD = 26.565^\circ$

ד. (1) $BC = 4\sqrt{5}$ ד. (2) 40 יח"ר $= S_{\Delta BOC}$

ג. $\left(6, \frac{1}{3}\right)$

ב. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

א. $y = -\frac{1}{12}x + \frac{5}{6}$ **(10)**

ד. $\frac{AO}{OF} = 2$, הנקודה O היא מפגש התיכונים במשולש.

ב. $\angle BOC = 26.56^\circ$

א. $C(-2, 4)$ (2)

א. $y = \frac{1}{2}x + 5$ (1) **(11)**

ג. $\frac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{5}{4}$ (2)

ג. (1) הוכחה.

ג. (1) הוכחה.

ב. $C(6, -4)$, $E(3, 0)$

א. $B(0, 4)$ **(12)**

ד. $\angle DEF = 71.56^\circ$

ג. (2) יח"ר.

ג. (1) $EC = \frac{3}{2}\sqrt{29} \approx 8.077$

ב. $C(-10, 15)$

א. $y = 2.5x + 40$ **(13)**

ד. $EK = 9.285$ ג. (2) $\angle CEB = 53.13^\circ$

חקירה:



(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

- א. מצאו את תחום ההגדרה. $y = (x+2)^2$ (1)
- ב. גזרו את הפונקציה. $y = 3x(x-1)^2$ (2)
- $y = 3x^3(3x-1)$ (4) $y = (2x+7)^8$ (3)
- $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x}$ (6) $f(x) = 4\sqrt{x} + 4x + 3$ (5)
- $f(x) = \sqrt{2x^2 + 7x}$ (8) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ (7)
- $f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$ (10) $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ (9)
- $f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2}$ (11)

(2) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.
- ב. מצאו את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה $x = -1$.
- ג. המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{3x-8}$, מקביל לישר שמשוואתו היא $2y - 3x = 4$. מצאו את משוואת המשיק.



(3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקרו את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

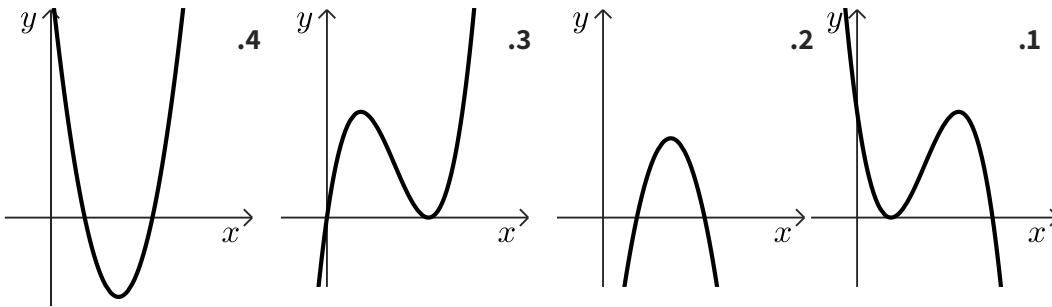
- א. מצאו תחום ההגדרה.
- ב. מצאו נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתבו תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצאו נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.





4 נתונה הפונקציה $f(x) = 2(x-2)^3 - 6x$.

- מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .
- מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- לפניכם 4 גרפים. קבעו איזה מבניהם עשוי להיות גרף הנגזרת $f'(x)$. נמקו.



1. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$, כמה נקודות קיצון יש לפונקציה $g(x)$?



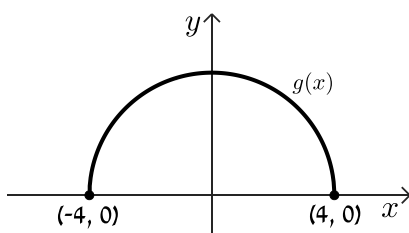
5 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2x-13}$.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 - הראו כי הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה.
 - סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- ב. נתונה הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(x+3)$.
מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.



6 נתונה הפונקציה $f(x)$. מגדירים: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

היעזרו בגרף הפונקציה $g(x)$ וקבעו איזו מבין הפונקציות הבאות היא $f(x)$:



- $f(x) = 4x - x^2$
- $f(x) = x^2 - 16$
- $f(x) = 16 - x^2$
- $f(x) = x^2 - 8x + 16$

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- האם הישר $y = x - 2$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$? נמקו.



8 נתונה הפונקציה: $f(x) = -2 + \sqrt{-x^2 + 5x}$

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ?
- מצאו את השיעורים של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$?
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

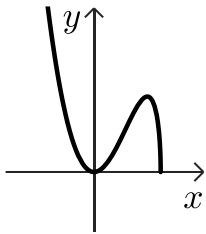


נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) + c$, (פרמטר c) שתחום הגדרתה הוא תחום ההגדרה של $f(x)$.

- מה הם כל ערכי c שבעבורם הפונקציה $g(x)$ חיובית בכל תחום הגדרתה?

9 בצויר שלפניכם מוצג גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 \sqrt{10 - 4x}$

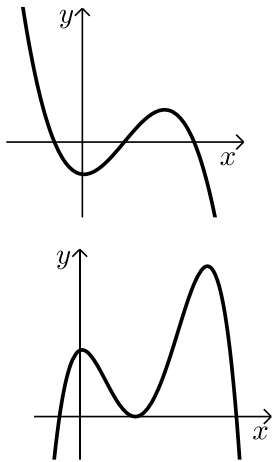
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה, וקבעו את סוגן.
- כמה פתרונות יש למשוואה: $x^2 \sqrt{10 - 4x} = 5$? נמקו את תשובתכם.



10 נתונה הפונקציה: $f(x) = ax \cdot \sqrt{12 - x}$, $a > 0$ הוא פרמטר.

- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
- (1) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -4$ הוא 9. מצאו את a .
(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
- מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
- סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
- נתונה הפונקציה: $g(x) = f(x) - k$, הפונקציה $g(x)$ משיקה לציר ה- x . מצאו את k .





11 ענו על הסעיפים הבאים:

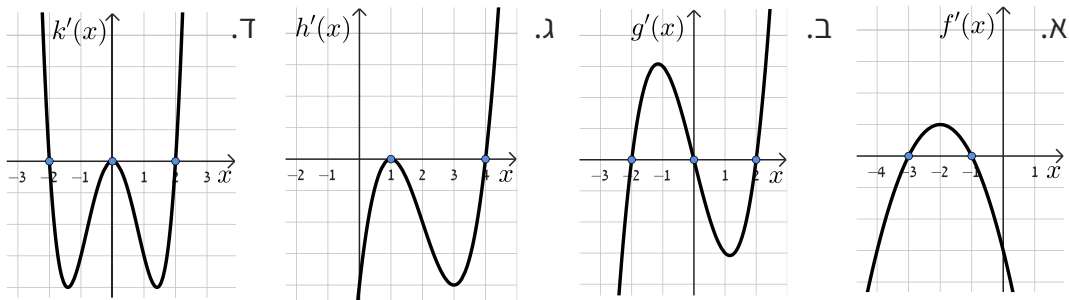
- א. נתון גרף של פונקציה. ציירו ועל אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמקו את השיקולים בסרטוט.
- ב. נתון גרף של פונקציה. ציירו על אותה מערכת צירים את גרף הנגזרת. נמקו את השיקולים בסרטוט.



12 לפניכם הגרפים של הפונקציות $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$, $k'(x)$ שהן

פונקציות הנגזרת של הפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ בהתאמה.

מצאו על פי הנתונים שבסרטוט את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ וקבעו את סוגן.

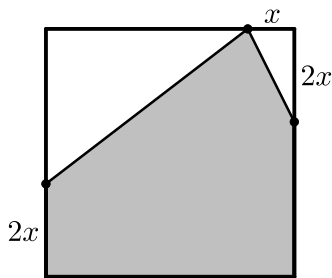


בעיות קיצון:

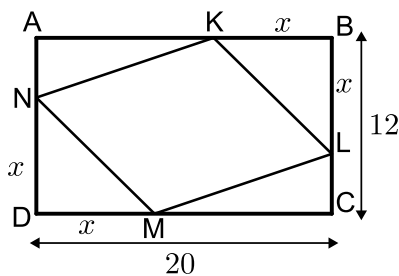
הערה:

הנושא בעיות קיצון ירד ממיקוד הלמידה לשנה הנוכחית. השאלות בחלק זה מיועדות לתלמידים שלמדו נושא זה במהלך השנה.

בעיות קיצון בהנדסת המישור:



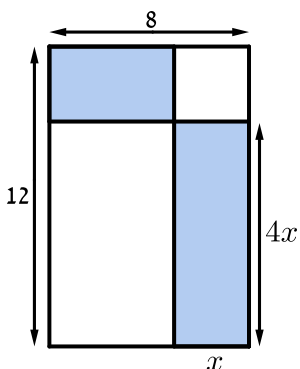
- 13** נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ. מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המסומן. מצאו מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.



- 14** הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן $ABCD$ כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$. צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו-12 ס"מ. א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים: $\Delta AKN + \Delta KBL + \Delta CLM + \Delta DNM$. ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע $LKNM$ יהיה מקסימלי. ג. מה הוא השטח של המרובע $LKNM$ במקרה זה?



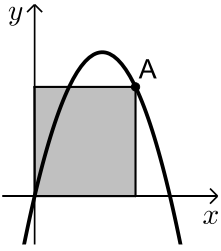
- 15** במשולש ישר זווית סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ. מה צריך להיות אורכו של כל ניצב על מנת ששטח המשולש יהיה מקסימלי?



- 16** נתון מלבן שאורכי צלעותיו הם 8 ס"מ ו-12 ס"מ כמתואר באיור. מקצים קטעים באורכים של x ושל $4x$ על צלעות המלבן כך שנוצרים המלבנים הצבועים. מצאו את x עבורו סכום שטחי המלבנים הצבועים הוא מינימלי.

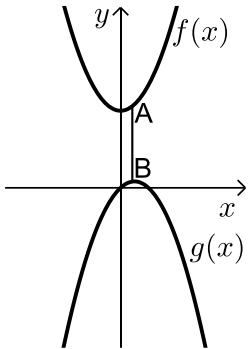


בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:



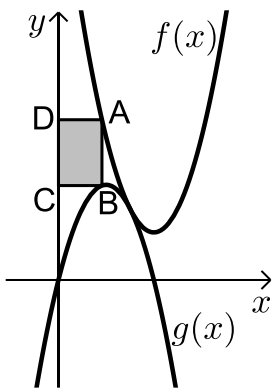
17 נתונה הפונקציה: $f(x) = 6x - x^2$.

מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בסרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



18 נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 12$ ו- $g(x) = 2x - x^2$

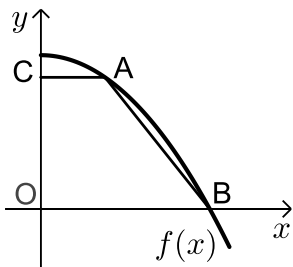
כמתואר: הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מצאו מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מינימלי.



19 באיור שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מעבירים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן).

- נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
- הביעו באמצעות t את שטח המלבן המסומן.
 - מצאו את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.
 - מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



20 נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$.

על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A. מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C. הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו- O ראשית הצירים.

- מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח הטרפז ABOC יהיה מקסימלי?
- מה יהיה שטח הטרפז במקרה זה?



תשובות סופיות:

(1) א. כל x ב. $y' = 2x + 4$ (2) א. כל x ב. $y' = 9x^2 - 12x + 3$

(3) א. כל x ב. $y' = 16(2x + 7)^7$ (4) א. כל x ב. $y' = 36x^3 - 9x^2$

(5) א. $x \geq 0$ ב. $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} + 4$ (6) א. $x \geq 0$ ב. $y' = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

(7) א. $x \leq 3\frac{1}{3}$ ב. $y' = \frac{-3}{2\sqrt{10-3x}}$ (8) א. $x \leq -3.5, x \geq 0$ ב. $y' = \frac{4x+7}{2\sqrt{2x^2+7x}}$

(9) א. $x \geq 0$ ב. $y' = 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}$ (10) א. $x \leq \frac{1}{2}$ ב. $y' = 2x\sqrt{1-2x} - x^2 \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

(11) א. כל x ב. $y' = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2+4}}$

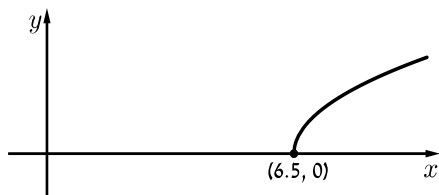
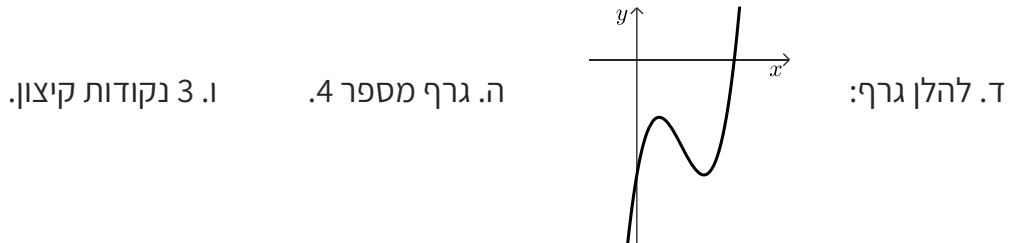
(2) א. $y = 2x - 3$ ב. $y = 24x + 22$ ג. $y = 1.5x - 3.5$

(3) א. כל x ב. $\max(0, 9), \min(\sqrt{5}, -16), \min(-\sqrt{5}, -16)$

ג. עולה: $-\sqrt{5} < x < 0$, $x > \sqrt{5}$ יורדת: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$
 ד. $(0, 9), (\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$

(4) א. $(0, -16)$ ב. מקסימום: $(1, -8)$, מינימום: $(3, -16)$

ג. עלייה: $x < 1$, $x > 3$, ירידה: $1 < x < 3$



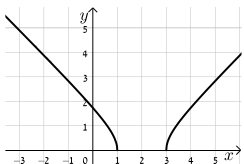
(5) א. $6.5 \leq x$ (1) א. $(6.5, 0)$ (2) א. (3) הוכחה. א. (4)

ב. $3.5 \leq x$

(6) תשובה ג.

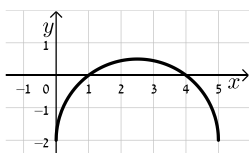
(7) א. $x \leq 1$ או $x \geq 3$ ב. $(0, \sqrt{3}), (3, 0), (1, 0)$

ג. עלייה: $x > 3$ ירידה: $x < 1$ ד. סרטוט מצורף משמאל



(8) א. $0 \leq x \leq 5$ ב. $(1, 0), (4, 0)$ ג. $\min(5, -2), \max(2.5, 0.5), \min(0, -2)$

ד. עולה: $0 < x < 2.5$, יורדת: $2.5 < x < 5$ ה. סקיצה:

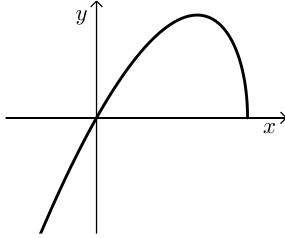


ו. $c > 2$

ג. 3 פתרונות. א. $x \leq 2.5$ ב. $\max(2, 4\sqrt{2}), \min(0, 0)$

א. $x \leq 12$ ב. (1) $a=2$ ב. (2) $(12, 0), (0, 0)$ ג. $\min(12, 0), \max(8, 32)$

סרטוט לסעיף ד:

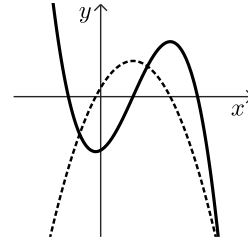
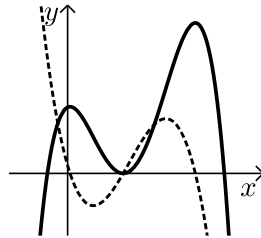


ה. $k=32$

ד. ראו סרטוט בצד.

ב.

א. (11)



א. עבור $f(x)$: $\min: x=-3$, $\max: x=-1$ (12)

עבור $g(x)$: $\min: x=2$, $\max: x=0$, $\min: x=-2$, עבור $h(x)$: $\min: x=4$

עבור $k(x)$: $\min: x=2$, $\max: x=-2$

(13) $x=6$

ג. 128 סמ"ר S .

ב. $x=8$

(14) א. $2x^2 - 32x + 240$

(15) א. 6 ס"מ ו-6 ס"מ.

(16) $x=2.75$

(17) $A(4, 8)$

(18) $A(0.5, 12.25)$

ג. $S=8$

ב. $t=1$

(19) א. $S=2t^3 - 12t^2 + 18t$

ב. $S=128$

(20) א. $A(2, 32)$



1) כרמית התבוננה בלוח טיסות בו מופיעות 26 טיסות. בטבלה שלפניכם מתוארת התפלגות הטיסות לפי החברה המפעילה את הטיסה:

חברת תעופה	ארקיע	אל-על	ישראייר	חברות זרות
כמות טיסות	6	5		

נתון כי מספר הטיסות שמפעילות חברות זרות גדול פי 4 ממספר הטיסות שמופעלות על ידי חברת ישראייר.

- מצאו כמה טיסות מופעלות על ידי חברת ישראייר וכמה טיסות מופעלות על ידי חברות זרות.
- (1) האם רוב הטיסות מופעלות על ידי חברות ישראליות? (הניחו כי החברות: ארקיע, אל-על וישראייר, הן חברות בבעלות ישראלית).
- (2) מה השכיחות היחסית (בשבר פשוט) של טיסות המופעלות על ידי חברות ישראליות?



2) החגורות במרכז הישראלי לקפוארה הן לפי צבעי דגל ברזיל: ירוק, צהוב, כחול ולבן. סדר החגורות מתחיל מצבע ירוק, ומתקדמים לצבעים: צהוב, כחול ולבסוף לבן.

צבע החגורה	ירוק	צהוב	כחול	לבן
מספר מתאמנים	12	20		10

לפניכם התפלגות צבעי החגורות של המתאמנים במרכז: השכיחות היחסית של בעלי חגורה ירוקה היא 0.2.

- חשבו את מספר המתאמנים במרכז.
 - חשבו את מספר המתאמנים בעלי חגורה כחולה.
- ביום שלישי נערך טקס חגורה ובו שניים מהמתאמנים קיבלו חגורה חדשה (עברו מרמה אחת לרמה הבאה אחריה). המאמן ערך טבלת שכיחויות יחסיות חדשה וגילה כי השכיחות היחסית של המתאמנים בעלי חגורה ירוקה ובעלי חגורה כחולה לא השתנתה.
- מה צבע החגורות החדש של המתאמנים שהועלו בדרגה?
 - בחרו את האפשרות המתאימה להשלמת המשפט:
ככל שצבע החגורה מתקדם, ההתפלגות:
- (1) עולה (2) יורדת (3) עולה ואז יורדת (4) יורדת ואז עולה

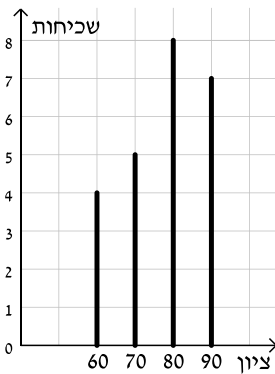
(3) נתונה התפלגות ציונים במתמטיקה בכיתה י"א 2. ממוצע הציונים הוא 6.5. מצאו את x .

ציון	5	6	7	8	9
מספר תלמידים	4	x	5	3	1



(4) במבחן שנערך בכיתה התקבלו הציונים הבאים:
14 תלמידים קיבלו ציון 8, 5 תלמידים קיבלו ציון 9, 3 תלמידים קיבלו ציון 10.

- א. מה הוא ממוצע הציונים הכיתתי?
ב. שבוע לאחר מכן נבחנו עוד 6 תלמידים וכולם קיבלו ציון 8.
האם הממוצע החדש גדל או קטן בהשוואה לממוצע הקודם?



(5) בדיאגרמת העמודות שלפניכם מתוארת התפלגות הציונים במבחן באנגלית שנערך בכיתה י'.

- א. מהו מספר התלמידים בכיתה?
ב. מהו הציון הממוצע?
ג. 6 תלמידים ניגשו למבחן חוזר.
ארבעה מהם שציונם 70 ו-80 שיפרו ל-90.
האם יש שינוי בממוצע הציונים של כלל הכיתה?



(6) במפעל ישנן 3 דרגות שכר: למנהלים 10,000 ש"ח, לטכנאים 7500 ש"ח ולפקידים 5500 ש"ח. השכר הממוצע במפעל הוא 6860 ש"ח. במפעל ישנם 8 מנהלים ובסך הכל ישנם 50 עובדים (כולל המנהלים). כמה טכנאים וכמה פקידים עובדים במפעל?



(7) בבית קפה מסוים מועסקים 30 מלצרים, 8 אחראי משמרת ושני מנהלים. שכרו של מלצר הוא: 6000 ש"ח. שכרו של אחראי משמרת הוא: 10000 ש"ח. שכרו של מנהל הוא: 12000 ש"ח.

- א. סדרו את הנתונים בטבלת שכיחויות מתאימה.
ב. מצאו את השכר השכיח, את השכר הממוצע ואת השכר החציוני בבית הקפה.
ג. כיצד ישתנו כל אחד מהמדדים שחישבתם בסעיף ב' אם המנהלים יקבלו תוספת שכר של 1000 ש"ח?
ד. כיצד ישתנו כל אחד מהמדדים שחישבתם בסעיף ב' אם כל המלצרים יקבלו תוספת שכר של 500 ש"ח?



הערה:



בשאלות 8-12 מופיע הנושא סטיית תקן. תוכלו למצוא קישורים לסרטוני התיאוריה העוסקים בנושא: [מוטיבציה להגדרה של סטיית התקן](#), ו-[הנוסחה הכללית של סטיית התקן](#).

8) חשבו את סטיית התקן של המספרים הבאים: 5, 3, 8, 7, 6, 2, 6, 5, 2, 5, 6, 2, 7, 2, 6, 7.



9) ממוצע הגבהים של תלמידי הכיתה הוא 168 ס"מ. לכיתה נוסף תלמיד חדש.

ממוצע הגבהים החדש של כל תלמידי הכיתה כעת נשאר 168 ס"מ.

א. מה הוא הגובה של התלמיד החדש?

ב. האם סטיית התקן של הגובה של כל תלמידי הכיתה (כולל התלמיד החדש)

קטנה יותר או גדולה יותר מסטיית התקן הקודמת, ללא התלמיד החדש? נמקו.



10) חמישה תלמידים נבחנו בהכתבה באנגלית. נתונות מספר שגיאות הכתיב

שעשה כל אחד מהם במבחן: 4, 5, 8, 9, 15 (מספר אחד לכל תלמיד).

א. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של מספר השגיאות שעשו חמשת התלמידים.

ב. בהכתבה חוזרת עשה כל תלמיד 3 שגיאות פחות ממה שעשה בהכתבה הראשונה.

(1) מה ממוצע השגיאות החדש?

(2) הסבירו מדוע סטיית התקן לא השתנתה.



11) נתונה התפלגות ציונים במבחן בתנ"ך עם סטיית תקן 1.

					הציון (x_i)
8	7	6	5	4	
					מספר התלמידים (f_i)
6	7	x	7	6	

א. הראו כי הממוצע הוא 6.

ב. מצאו את x .



12) לפניכם רשימת מחירים של כרטיסים להופעת אמן לפי מקום ישיבה מהבמה:

75, 78, 82, 88, 91, 95, 100.

א. חשבו את ממוצע מחירי הכרטיסים ואת סטיית התקן.

ב. הוסיפו מחיר כרטיס כרצונכם להופעה חדשה כך שהממוצע לא ישתנה.

האם לאחר הוספת המספר, סטיית התקן גדלה? קטנה? או שלא השתנתה? נמקו.

ג. עינת טוענת שאם יתווסף המחיר 89 ש, הממוצע יגדל.

האם היא צודקת? נמקו.

ד. איזה ציון יש לצרף לרשימה המקורית כדי שהציון לא ישתנה?



תשובות סופיות:

- (1) א. ישראייר – 3 טיסות , חברות זרות – 12 טיסות.
- ב. (1) כן, $14 > 12$. ב. (2) $\frac{14}{26} = \frac{7}{13}$
- (2) א. 60 מתאמנים. ב. 18 מתאמנים.
- ג. מתאמן אחד עבר מחגורה צהובה לחגורה כחולה.
מתאמן שני עבר מחגורה כחולה לחגורה לבנה.
ד. עולה ואז יורדת.
- (3) $x = 7$
- (4) א. 8.5. ב. הממוצע קטן.
- (5) א. 24 תלמידים. ב. 77.5. ג. כן (ראו הסבר בסרטון הוידאו).
- (6) במפעל יש 16 טכנאים ו-26 פקידים.
- (7) א. ראה טבלת שכיחויות בסרטון הוידאו. ב. שכיח: 6000 ש, ממוצע: 7100 ש, חציון: 6000 ש.
ג. השכיח והחציון יישארו זהים. הממוצע יעלה: 7150 ש.
ד. השכיח והחציון יהיו: 6500 ש, הממוצע יהיה: 7475 ש
- (8) $S = 1.927$
- (9) א. 168 ס"מ. ב. קטנה יותר.
- (10) א. $\bar{x} = 8.2, S = 3.86$. ב. (1) $\bar{x} = 5.2$
- ב. (2) כאשר מקטינים את כל הנתונים בגודל קבוע, הפיזור סביב הממוצע נשאר קבוע ולכן הממוצע יקטן אבל סטיית התקן לא תשתנה.
- (11) א. הוכחה. ב. $x = 36$.
- (12) א. $\bar{x} = 87, S = 8.45$. ב. $x = 87$, סטיית התקן תקטן.
ג. כן, כי הוספת מספר הגדול מהממוצע יגדיל את הממוצע החדש. ד. 88.